

Чебакова Виолетта Юрьевна

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО  
ЕМКОСТНОГО РАЗРЯДА ПРИ ПОВЫШЕННЫХ И ПОНИЖЕННЫХ  
ДАВЛЕНИЯХ В АРГОНЕ**

АВТОРЕФЕРАТ

Диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Казань – 2016

Работа выполнена в Казанском (Приволжском) федеральном университете

Научный руководитель: Бадриев Ильдар Бурханович, д. ф.-м.н. // Казанский Федеральный Университет, профессор каф. вычислительной математики

Научный консультант: Желтухин Виктор Семенович, д. ф.-м.н. // г.н.с. КНИТУ

Официальные оппоненты: Аганин Александр Алексеевич, д.ф.-м.н. // Институт механики и машиностроения Казанского НЦ РАН, зав. лаб.

Лебедев Юрий Анатольевич, д.ф.-м.н. // Институт нефтехимического синтеза им. А.В. Топчиева РАН, зав. лаб.

Ведущая организация: Институт механики УрО РАН.

Защита состоится «\_\_\_»\_\_\_\_\_ 2016 г. в 14.30 на заседании диссертационного совета Д 212.081.11 при Казанском федеральном университете (420008, г. Казань, ул. Кремлевская,18) по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18, ауд. 2 мех.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Казанского (Приволжского) федерального университета. Электронный вариант автореферата размещен на сайте: <http://www.kpfu.ru>

Отзывы по данной работе в двух экземплярах, заверенные печатью организации, просим направлять по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская,18, диссертационный совет Д 212.081.11

Автореферат разослан «\_\_\_»\_\_\_\_\_2016 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
к.ф.-м.н., доцент

А.А. Саченков

**Актуальность работы.** Низкотемпературная неравновесная плазма широко используется для создания микро- и наноструктур, а также модификации поверхностей (например, для обработки материалов с целью повышения срока службы и надежности изделий машиностроения, создания легких и прочных полимерных композиционных материалов, полиэтиленпластиков, получения нанодисперсионных порошков металлов и соединений и т.д.). Разработка установок для обработки материалов связана с проведением большого количества экспериментальных исследований по подбору параметров плазменных установок. Несмотря на то, что к настоящему времени разработаны теоретические основы различных плазмохимических процессов, в каждом конкретном случае требуется проведение специальных исследований. Натурные эксперименты, как правило, не дают детальной информации о внутренних параметрах плазмы. Поэтому для исследований применяются экспериментально-расчетные методики, которые, взаимно дополняя друг друга, позволяют решать многие задачи физики и химии низкотемпературной плазмы. Именно такой подход позволяет связать внутренние и внешние параметры разрядов. Эта задача особенно важна для оптимизации параметров плазмохимических процессов. В связи с этим большое внимание уделяется разработке моделей разного уровня для исследования механизмов процессов, происходящих в плазме, определяемых процессами в газовой фазе и взаимодействием плазмы с поверхностями.

Для моделирования разрядов используют нуль-, одно-, двух- и трехмерные модели разрядов (Castanos Martinez E et al, 2004; Lymberopoulos Dimitris P., Economou Demetre J., 1993; Швейгерт В.А., 1993; Исламов Р.Ш., 1991; Boeuf J.P. , Pitchford L.C., 1995; Salabas A., Gousset G., Alves L., 2002; Суржиков С.Т., 2008; Shigeru Yonemura, Kenichi Nanbu, and Naoaki Iwata, 2004; Epstein I. L. et al, 2014 и т.д.). Первые, как правило, служат для детального исследования кинетики процессов в плазме и содержат кинетические схемы, включающие в себя тысячи кинетических уравнений. Эти схемы неизбежно должны упрощаться при переходе к моделям высшей размерности. Двухмерные и трехмерные модели позволяют детально описать пространственную структуру разрядов, однако следует отметить, что их реализация требует значительных затрат машинного времени, при этом моделирование проводится лишь в упрощенной постановке, когда не учитывается ряд эффектов, присущих разрядам. Одномерные модели позволяют с относительно малыми затратами для своей реализации описать физическую картину процессов в разряде при условии, что такие модели адекватно описывают разряд.

Для получения плазмы используются различные типы разрядов, в их числе широко применяются высокочастотные разряды и, в частности, высокочастотные емкостные (ВЧЕ) разряды (Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Кашапов Н.Ф., 2000; Райзер Ю.П., Шнейдер М.Н., Яценко Н.А., 1995; Савинов В.П. 2013; Fridman A., 2008; Pascal Chebert, Nicholast Braithwaite, 2011). В ВЧЕ-установках наиболее часто в качестве плазмообразующего газа используется аргон. Так как концентрация метастабильных атомов в аргоне сопоставима с концентрацией заряженных частиц, то сверхупругие столкновения этих атомов с электронами приводят к изменению средней энергии и коэффициентов скоростей всех процессов под действием электронного удара (Karoulina E., Lebedev Yu., 1992; Дятко Н.А. и др., 2005; Ferreira C.M., Loureiro J., Ricard A., 1985; Байсова Б.Т. и др., 2003). ВЧЕ-разряды при различных диапазонах давлений отличаются как различными значениями характеристик разряда (концентрация заряженных частиц, газовая температура, энергия электронов), так и механизмами внутренних процессов.

Отметим, что достаточно подробно исследованы модели ВЧЕ-разряда среднего и низкого диапазонов давлений, описывающие пространственное распределение характеристик разряда с учетом минимального количества внутренних плазмохимических реакций и без учета изменений распределения газовой температуры в пространстве. ВЧЕ-разряды повышенного и пониженного давления практически не исследованы. В последнее время усиливается интерес к ВЧЕ-разрядам пониженного давления (Xi-Ming Zhu and Yi-Kang Pu, 2010; Lauro-Taroni L. et al, 2004; Bora B. et al, 2011), это обусловлено появлением возможности обработки натуральных материалов (ткани, кожевенно-меховые полуфабрикаты) вследствие небольшого значения атомной температуры в разрядах такого типа, а также к ВЧЕ-разрядам атмосферного давления (Seo B.H., Kim D.W. et al, 2015; Balcon N. et al, 2008). Однако используемые диффузионно-дрейфовые модели при пониженных давлениях, как правило, учитывают зависимости коэффициентов от электронной температуры и лишь небольшой набор плазмохимических реакций; наличие зависимостей скоростей реакции от атомной температуры и изменение атомной температуры в пространстве не принимается во внимание. При атмосферном давлении установлен факт зависимости отношения молекулярных и атомарных ионов от температуры, но в основном это кинетические модели, в которые атомная температура является входным параметром. Из-за специфических особенностей ВЧЕ-разряда математические модели в диффузионно-дрейфовой постановке обладают рядом особенностей, осложняющих их численное решение, и требуют существенной адаптации существующих алгоритмов.

Таким образом, с одной стороны, ВЧЕ-разряды при пониженных и повышенных давлениях широко используются на практике, а с другой стороны, математические модели таких разрядов недостаточно разработаны.

**Цель работы.** Целью работы является создание самосогласованных математических моделей неравновесной низкотемпературной плазмы ВЧЕ-разряда в аргоне в широком диапазоне давлений, позволяющих рассчитывать структуру и внутренние параметры ВЧЕ-разрядов для управления параметрами ВЧЕ-разряда при решении целевых задач, а также создание соответствующих эффективных численных алгоритмов, реализованных в виде прикладного программного обеспечения, для анализа изменения компонент ионизированного инертного газа в зависимости от диапазонов давления, выявления основных факторов, влияющих на внутренние процессы в ВЧЕ-разрядах.

#### **Основные положения, выносимые на защиту.**

1. Самосогласованные модели неравновесной низкотемпературной плазмы ВЧЕ-разряда в аргоне при повышенных и пониженных давлениях, включающие в себя различные кинетические схемы расчетов, адаптированные для пониженных и повышенных давлений.
2. Численные алгоритмы реализации разработанных моделей, основанные на конечно-мерной аппроксимации с помощью разностных схем с последующим применением для реализации итерационных процессов.
3. Комплексы программ для решения поставленных задач на основе предложенных алгоритмов.
4. Результаты численного моделирования, показавшие, что в случае существенного нагрева газа (при повышенных давлениях, а также в случае больших межэлектродных расстояниях при пониженных давлениях) изменение газовой температуры в межэлектродном пространстве начинает существенно влиять на соотношение вкладов различных плазмохимических процессов в образование и гибель частиц, а, следовательно, на распределение и

долю заряженных (электронов, атомарных и молекулярных ионов) и возбужденных частиц в разрядном промежутке.

#### **Научная новизна.**

1. Построены самосогласованные математические модели в широком диапазоне давлений ВЧЕ-разряда в аргоне, в которых учитывается пространственное изменение газовой температуры. В случае повышенных давлений модель включает в себя уравнения для расчета концентрации молекулярных ионов и димеров.

2. Разработан численный метод, основанный на использовании неявной разностной схемы, построенной интегро-интерполяционным методом с применением направленных по потоку конечных разностей, и метода Гуммеля, с последующим использованием для решения разностной схемы итерационного процесса.

3. Разработан программный комплекс, позволяющий рассчитывать характеристики ВЧЕ-разряда в широком диапазоне давлений.

4. Определены условия, при которых математические модели должны учитывать нагрев газа.

**Достоверность.** Достоверность и обоснованность полученных в диссертации результатов обеспечивается анализом физической постановки модели и корректным применением численных методов, соответствием полученных результатов физической картине ВЧЕ-разряда, а также хорошим согласованием найденных численных решений ряда задач с известными данными натурных экспериментов и с данными других авторов.

**Теоретическая и практическая значимость.** Практическая ценность состоит в возможности применения разработанного прикладного программного обеспечения для расчета основных параметров ВЧЕ-разрядов при повышенных и пониженных давлениях с целью управления производственным процессом.

Теоретическая ценность состоит в возможности применения разработанных математических моделей и численных алгоритмов для анализа механизмов процессов в плазме аргона в широком диапазоне давлений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 11-01-00864, 14-01-00755, 15-41-02672, 16-31-00378)

**Апробация работы.** Результаты работы докладывались на следующих конференциях: Девятая Всероссийская и Десятая Международная конференция «Сеточные методы для краевых задач и приложения» (Казань, 2012, 2014 г.г.); Международная научная конференция «Плазменные технологии исследования, модификации и получения материалов различной физической природы» (Казань, 2012 г.); IX Международная конференция по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2012) (Алушта, 2012 г.); XVIII Международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2013) (Алушта, 2013 г.); II Международная конференция «Высокопроизводительные вычисления – математические модели и алгоритмы», посвященная Карлу Якоби (Калининград, 2013 г.); Двенадцатая молодежная научная школа-конференция «Лобачевские чтения-2013» (Казань, 2013 г.); XLI–XLII Международные звенигородские конференции по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу и УТС (Звенигород, 2014-2015 г.г.); Международная конференция «Advanced mathematics, computations and applications-2014» (Новосибирск, 2014 г.); Всероссийская (с международным участием) конференция «Физика низкотемпературной плазмы» ФНТП-2014 (Казань, 2014 г.); VII Международный симпозиум по теоретической и прикладной плазмохимии (Плес, 2014 г.), Международные конференции

«Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна» (Воронеж, 2014, 2016 г.г.); FDM'14: Sixth Conference on Finite Difference Methods: Theory and Applications (Lozenetz, 2014 г.); XXVII Международная научная конференция «Математические методы в технике и технологиях ММТТ-27» (Тамбов, 2014 г.); Международная конференция по математической теории управления и механике (Суздаль, 2015 г.); Всероссийская конференция с международным участием, посвященная памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова «Теория управления и математическое моделирование» (Ижевск, 2015 г.); Четырнадцатая Всероссийская молодежная научная школа-конференция «Лобачевские чтения-2015» (Казань, 2015 г.); VI Всероссийская молодежная конференция по фундаментальным и инновационным вопросам современной физики (Москва, 2015 г.)

**Структура и объем работы.** Диссертация изложена на 123 страницах, состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, заключения, одного приложения и списка литературы, включающего 165 работ.

#### **Краткое содержание работы.**

Во **введении** обоснована актуальность рассматриваемых в диссертации вопросов, определены цель работы, научная новизна, представлены основные положения, выносимые на защиту; изложено краткое содержание работы по главам.

В **первой главе** проведен обзор работ, посвященных ВЧЕ-разрядам. Приведены результаты экспериментальных и теоретических исследований ВЧЕ-разрядов, их характеристики в различных газовых средах с различными материалами электродов и расстояниями между ними, разными диапазонами давлений. Значительное внимание уделено описанию используемых математических моделей ВЧЕ-разряда, а также тлеющего разряда, плазма которого во многом подобна плазме ВЧЕ-разряда. Подробно рассмотрены плазмохимические реакции, учитываемые при моделировании аргоновой плазмы. Дан также обзор работ по математическому моделированию явлений в электрических разрядах (эмиссия электронов с граничных поверхностей, взаимодействие плазмы с материалами и т.д.). Анализ литературы показал, что, несмотря на большое количество опубликованных работ, многие вопросы моделирования ВЧЕ-разрядов еще мало изучены. Например, в части моделирования разрядов в аргоне это относится к созданию моделей и пакетов программ для моделирования ВЧЕ-разряда в широком диапазоне давлений, позволяющих анализировать физико-химические процессы в них, с целью использования при решении различных прикладных задач.

Во **второй главе** построена самосогласованная математическая модель ВЧЕ-разряда в нелокальном приближении при пониженных давлениях в аргоне, в которой коэффициенты скоростей процессов, проходящих при электронных ударах, взяты с учетом электрон-электронных столкновений в зависимости от электронной температуры и степени ионизации. Представленная модель описывает ВЧЕ-разряд между двумя плоско-параллельными электродами, один из которых заземлен, а другой соединен с ВЧЕ-генератором, расстояние между электродами много меньше размеров самих электродов. В этих условиях электрическое поле близко к потенциальному и разряд однороден вдоль электродов, что позволяет использовать одномерное приближение. Соотношения между оценками времени диссипации энергии электронов и периодом поля, а также между длинами релаксации энергии электронов и размером расчетной области при пониженных давлениях показывают, что при моделировании ВЧЕ-разряда в данных условиях нужно использовать нелокальное приближение (Кудрявцев А.А., Смирнов А.С., Цендин Л.Д., 2010).

Рассматриваемая модель включает в себя:

### 1. Уравнение конвекции–диффузии для атомарных ионов

$$\frac{\partial n_+}{\partial t} + \frac{\partial G_+}{\partial x} = R_1 n_e N + R_2 n_m^2 + R_3 n_m n_e - R_4 n_e n_+ - R_5 n_e^2 n_+, \quad 0 \leq x \leq b, \quad t > 0,$$

$n_e, n_+$  – концентрации электронов, атомарных положительно заряженных ионов соответственно,  $n_m$  – концентрация метастабильных атомов аргона,  $G_+ = -D_+ \partial n_+ / \partial x + \mu_+ n_+ E$  – плотность потока атомарных ионов,  $\mu_+$  – подвижность атомарных ионов,  $D_+$  – коэффициент диффузии атомарных ионов,  $E = -\partial \varphi / \partial x$  – напряженность электрического поля,  $\varphi$  – потенциал электрического поля.

Здесь и далее  $R_i, i=1...20$ , – коэффициенты скоростей соответствующих плазмохимических реакций ( $\text{Ar} + e \rightarrow \text{Ar}^+ + 2e$ ;  $\text{Ar}^* + \text{Ar}^* \rightarrow \text{Ar} + \text{Ar}^+ + e$ ;  $\text{Ar}^* + e \rightarrow \text{Ar}^+ + 2e$ ;  $\text{Ar}^+ + e \rightarrow \text{Ar} + h_\nu$ ;  $\text{Ar}^+ + 2e \rightarrow \text{Ar} + e$ ;  $\text{Ar} + e \rightarrow \text{Ar}^* + e$ ;  $\text{Ar}^* \rightarrow \text{Ar} + h_\nu$ ;  $\text{Ar}^* + \text{Ar} \rightarrow 2\text{Ar}$ ;  $\text{Ar}^* + e \rightarrow \text{Ar} + e$ ).

При постановке граничных условий считается, что при  $x=0$  (заземленный электрод) поле направлено в электрод, если  $E < 0$ , и от электрода, если  $E \geq 0$ , а при  $x=b$  (нагруженный электрод) поле направлено в электрод, если  $E \geq 0$ , и от электрода, если  $E < 0$ :

$$G_+(0, t) = \begin{cases} (-n_+ v_+ + \mu_+ n_+ E) \big|_{(0+, t)}, & E < 0 \\ (-n_+ v_+) \big|_{(0+, t)}, & E \geq 0 \end{cases}, \quad G_+(b, t) = \begin{cases} (v_+ n_+ + \mu_+ n_+ E) \big|_{(b-, t)}, & E \geq 0 \\ (v_+ n_+) \big|_{(b-, t)}, & E < 0 \end{cases},$$

$v_+ = \sqrt{8kT_a / \pi m_+} / 4$  – средняя тепловая скорость иона,  $m_+$  – масса атомарного иона.

### 2. Уравнение конвекции–диффузии для электронного газа

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial G_e}{\partial x} = R_1 n_e N + R_2 n_m^2 + R_3 n_m n_e - R_4 n_e n_+ - R_5 n_e^2 n_+, \quad 0 \leq x \leq b, \quad t > 0,$$

$G_e = -D_e \partial n_e / \partial x - \mu_e n_e E$  – плотность потока электронов,  $\mu_e$  – подвижность электронов,  $D_e$  – коэффициент диффузии. Граничные условия выбираются в виде

$$G_e(0, t) = \begin{cases} (-n_e v_e - \gamma \mu_+ n_+ E) \big|_{(0+, t)}, & E < 0 \\ (-n_e v_e - \mu_e n_e E) \big|_{(0+, t)}, & E \geq 0 \end{cases}, \quad G_e(b, t) = \begin{cases} (n_e v_e - \gamma \mu_+ n_+ E) \big|_{(b-, t)}, & E \geq 0 \\ (n_e v_e - \mu_e n_e E) \big|_{(b-, t)}, & E < 0 \end{cases}$$

$v_e = \sqrt{8kT_e / \pi m_e} / 4$  – средняя тепловая скорость электрона,  $\gamma$  – коэффициент вторичный электронной эмиссии с электродов,  $T_e$  – температура электронов,  $m_e$  – масса электрона. В газе содержится  $\sim 10^4 \text{ см}^{-3}$  заряженных частиц. Это значение принимается за начальные условия для заряженных частиц.

### 3. Уравнения Пуассона для потенциала электрического поля

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{q_e}{\varepsilon_0} (n_+ - n_e) \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq b, \quad t > 0,$$

с граничными условиями  $\varphi(0, t) = 0$ ,  $\varphi(b, t) = V_a \sin(\omega t)$ . Здесь  $q_e$  – заряд электрона,  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная вакуума,  $V_a$  – амплитуда колебания напряжения на нагруженном электроде,  $\omega$  – круговая частота электромагнитного поля.

### 4. Уравнение баланса концентрации метастабильных атомов

$$\frac{\partial n_m}{\partial t} - \frac{\partial G_m}{\partial x} = R_6 N n_e - R_2 n_m^2 - R_3 n_m n_e - R_7 n_m - R_8 N n_m - R_9 n_m n_e,$$

$G_m = D_m \partial n_m / \partial x$  – плотность потока метастабильных атомов,  $D_m$  – коэффициент диффузии метастабильных атомов аргона. Граничные условия следующие:  $G_m(0, t) = (-n_m v_a) \big|_{(0+, t)}$ ,

$G_m(b, t) = (n_m v_a) \big|_{(b-, t)}$ , где  $v_a = \sqrt{8kT_a / \pi m_a} / 4$  – средняя тепловая скорость атома. Начальные условия выбираются нулевыми:  $n_m(x, 0) = 0$ .

#### 5. Уравнение теплопроводности атомно-ионного газа

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\lambda_a \frac{\partial T_a}{\partial x} \right) = j_i E + Q_{yn} N n_e,$$

$j_i = e \mu_+ n_+ E$  – дрейфовый ионный ток,  $\lambda_a$  – коэффициент теплопроводности атомно-ионного газа,  $Q_{yn}$  – энергия получаемая тяжелыми частицами при упругих столкновениях с электронами. Граничные условия для данного уравнения  $T_a(0, t) = T_a(b, t) = T_w$ , где  $T_w$  – температура электрода.

#### 6. Нестационарное уравнение теплопроводности для электронной температуры

$$\frac{3}{2} k \frac{\partial (n_e T_e)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{5}{2} k T_e G_e - \lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial x} \right) = q_e n_e \langle \mu_e E^2 \rangle - Q_{yn} N n_e - I R_1 n_e N - I_1 R_3 n_m n_e.$$

Здесь  $I = 15.76$  эВ – потенциал ионизации,  $I_1 = 4.2$  эВ – потенциал ступенчатой ионизации – коэффициент электронной теплопроводности, через  $\langle \cdot \rangle$  обозначено усреднение по периоду колебания электрического поля. Граничные условия для данного уравнения имеют вид

$$T_e(0, t) = T_e(b, t) = T_{e,w}.$$

Коэффициенты скоростей процессов при электронном ударе рассчитывались с помощью программы BOLSIG+ с учетом электрон–электронных столкновений в зависимости от электронной температуры и степени ионизации.

Особенностями представленной математической модели, осложняющими разработку численных методов решения задачи, являются:

1) Системы состоят из задач разного типа: начально–краевых задач для уравнений с частными производными параболического типа и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, в которые время входит как параметр. Дополнительная сложность обусловлена разными временными рамками изменения основных характеристик установившегося состояния ВЧЕ-разряда пониженного давления.

2) Характерной особенностью задачи является наличие больших градиентов плотности заряженных частиц и напряженности электрического поля, электронной температуры в приэлектродных слоях на границах расчетной области, то есть, если в квазинейтральной области мы имеем процесс с доминированием диффузии (регулярно возмущенная задача), то в приэлектродных областях наблюдается случай сильного доминирования конвекции (сингулярно возмущенная задача). Это приводит к появлению областей сильного изменения решения.

3) Представленная система задач является нелинейной как по отдельным входящим в нее уравнениям, так и в целом.

4) Требуется проводить вычисление потоков в областях сильно меняющихся коэффициентов при наличии больших градиентов решения.

Проведен обзор численных методов, позволяющих преодолеть указанные трудности. Разработан численный алгоритм решения рассматриваемой нелинейной системы краевых и начально-краевых задач. Для его построения использовался приближенный метод, основанный на конечномерной аппроксимации задачи с помощью разностных схем с последующим применением для ее реализации итерационного процесса. Неявная разностная схема построена интегро–интерполяционным методом с применением метода направленных разно-



стей. Линеаризация системы проведена по методу типа Зейделя, при этом численный алгоритм основан на опускании нелинейности во всех коэффициентах на нижний слой. Нелинейные квадратичные слагаемые в правой части были линеаризованы с помощью схемы Ньютона. Плотности потоков для ионного и электронного газа рассчитаны по методу типа Гуммеля.

Разработан программный комплекс, который реализует численный алгоритм нахождения основных параметров нестационарного высокочастотного разряда пониженного давления в одномерном приближении. Для его создания использована среда MatLab. В результате работы комплекса визуально выводятся распределения концентрации ионов, электронов, метастабильных атомов, атомной и электронной температуры на каждом временном слое, полный ток. Дополнительно пользователь может рассчитать усредненные по периоду параметры ВЧЕ-разряда. Приведены результаты расчетов, проведенных с помощью разработанного программного комплекса, и проведен их сравнительный анализ с данными других авторов, в частности, с данными натурных экспериментов.

Результаты тестовых расчетов ВЧЕ-разряда в плазмотроне с межэлектродным расстоянием 22мм, давлением  $P=13.3\text{Па}$ , амплитуде приложенного напряжения  $V_a=65\text{В}$  качественно совпадают с данными работы Лисовского В.А. (1998), при этом концентрация ионов имеет характерную колоколообразную форму с максимумом в центре разряда  $n_+ \approx 10^{15}$ , тогда как по экспериментальным данным этой работы  $n_+ \approx 7 \cdot 10^{14}$  (рис. 1). Усредненная температура электронов имеет два локальных максимума в приэлектродных областях. При этом максимальные значения электронной температуры за период  $T_{e,\max} \approx 3\text{эВ}$  достигается в области приэлектродных слоев. В области квазинейтральной плазмы минимальное значение электронной температуры равнялось  $T_{e,\min} \approx 2.2\text{эВ}$ . Температура газа оставалась практически постоянной  $T_a \approx 305\text{К}$ . В работе (Лисовский В.А., 1998) при напряжении  $V_a=65\text{В}$  и давлении  $P=13.3\text{Па}$  зафиксирована следующие значения температуры  $T_{e,\max} \approx 3,4\text{эВ}$ ,  $T_{e,\min} \approx 1.7\text{эВ}$  при погрешности измерений в 20% (рис. 2) В межэлектродном промежутке значения полной плотности тока  $j(t) = q_e(G_i - G_e) + \varepsilon_0 \partial E / \partial t$  в каждый момент времени остаются постоянными, но во времени испытывают практически гармонические колебания со сдвигом фазы по сравнению с напряжением.

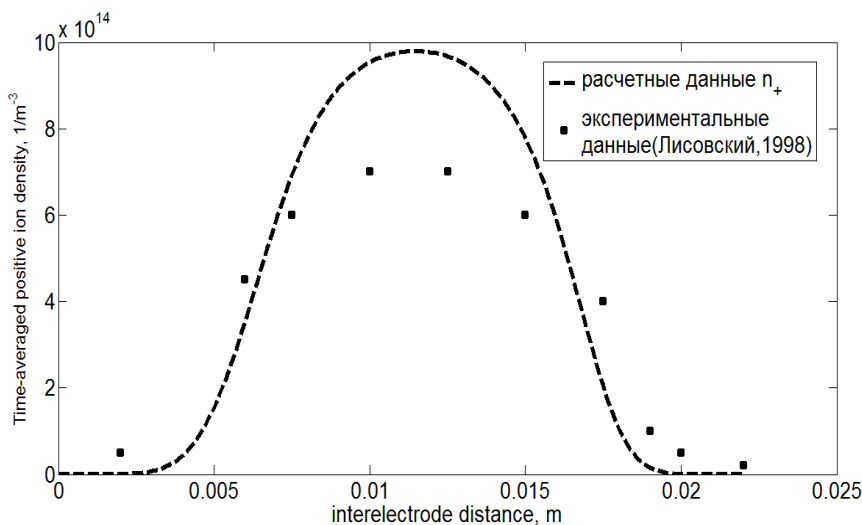


Рис. 1. Сравнение распределений усредненной ионной концентрации в межэлектродном пространстве с данными работы (Лисовский В.А., 1998).

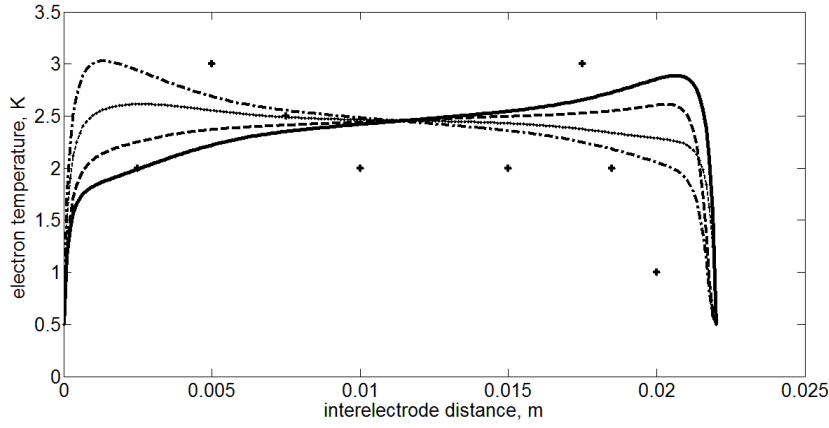


Рис. 2. Сравнение распределений электронной температуры в межэлектродном пространстве в разные моменты времени и данными работы (Лисовский В.А., 1998).

В третьей главе дано обоснование для включения плазмохимических реакций с участием димеров и молекулярных ионов в модель ВЧЕ-разряда при повышенных давлениях в аргоне ( $\text{Ar}^* + \text{Ar}^* \rightarrow \text{Ar}_2^+ + e$ ;  $2\text{Ar} + \text{Ar}^+ \rightarrow \text{Ar}_2^+ + \text{Ar}$ ;  $\text{Ar}_2^+ + e \rightarrow \text{Ar} + \text{Ar}^+ + e$ ;  $\text{Ar}_2^+ + e \rightarrow \text{Ar} + \text{Ar}$ ;  $\text{Ar}_2^* \rightarrow 2\text{Ar} + h\nu$ ;  $\text{Ar}^* + 2\text{Ar} \rightarrow \text{Ar}_2^* + \text{Ar}$ ;  $\text{Ar}_2^* + \text{Ar}_2^* \rightarrow e + 2\text{Ar} + \text{Ar}_2^+$ ;  $\text{Ar}_2^* + \text{Ar}^* \rightarrow e + \text{Ar} + \text{Ar}_2^+$ ;  $e + \text{Ar}_2^* \rightarrow 2\text{Ar}^* + e$ ;  $\text{Ar}^* + 2\text{Ar} \rightarrow 3\text{Ar} + h\nu$ ;  $\text{Ar}_2^+ + \text{Ar} \rightarrow 2\text{Ar} + \text{Ar}^+$ ). Приведенная в главе самосогласованная модель ВЧЕ-разряда при повышенных давлениях содержит:

1. Уравнение конвекции–диффузии для атомарных ионов

$$\frac{\partial n_+}{\partial t} + \frac{\partial G_+}{\partial x} = R_1 n_e N + R_2 n_m^2 + R_3 n_m n_e - R_4 n_e n_+ - R_5 n_e^2 n_+ + R_{12} n_e n_{2+} - R_{11} n_+ N^2 + R_{20} N n_{2+}, 0 \leq x \leq b, t > 0,$$

$n_{2+}$  – молекулярных положительно заряженных ионов. Уравнение дополнено граничными условиями

$$G_+(0, t) = \begin{cases} (-n_+ v_+ + \mu_+ n_+ E) |_{(0+, t)}, & E < 0 \\ (-n_+ v_+) |_{(0+, t)}, & E \geq 0 \end{cases}, G_+(b, t) = \begin{cases} (n_+ v_+ + \mu_+ n_+ E) |_{(b-, t)}, & E \geq 0 \\ (n_+ v_+) |_{(b-, t)}, & E < 0 \end{cases}$$

2. Уравнение конвекции–диффузии для молекулярного иона  $\text{Ar}_2^+$

$$\frac{\partial n_{2+}}{\partial t} + \frac{\partial G_{2+}}{\partial x} = R_{10} n_m^2 + R_{11} n_+ N^2 - R_{12} n_e n_{2+} - R_{13} n_e n_{2+} + R_{16} n_{2+}^2 + R_{17} n_m n_{2+} - R_{20} N n_{2+}, 0 \leq x \leq b, t > 0,$$

$G_{2+} = -D_{2+} \partial n_{2+} / \partial x + \mu_{2+} n_{2+} E$  – плотность потока молекулярных ионов,  $\mu_{2+}$  – подвижность молекулярных ионов,  $D_{2+}$  – коэффициент диффузии молекулярных ионов. Как и для уравнения конвекции–диффузии для атомарных ионов, граничные условия сформулируем в виде

$$G_{2+}(0, t) = \begin{cases} (-n_{2+} v_{2+} + \mu_{2+} n_{2+} E) |_{(0+, t)}, & E < 0 \\ (-n_{2+} v_{2+}) |_{(0+, t)}, & E \geq 0 \end{cases}, G_{2+}(b, t) = \begin{cases} (n_{2+} v_{2+} + \mu_{2+} n_{2+} E) |_{(b-, t)}, & E \geq 0 \\ (n_{2+} v_{2+}) |_{(b-, t)}, & E < 0 \end{cases}$$

$v_{2+} = \sqrt{8kT_a / \pi m_{2+}} / 4$  – средняя тепловая скорость атомарного иона,  $m_{2+}$  – масса атомарного иона.

3. Уравнение конвекции–диффузии для электронного газа

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial G_e}{\partial x} = R_1 n_e N + R_2 n_m^2 + R_3 n_m n_e - R_4 n_e n_+ - R_5 n_e^2 n_+ + R_{10} n_m^2 - R_{13} n_e n_{2+} + R_{16} n_{2+}^2 + R_{17} n_m n_{2+}, 0 \leq x \leq b, t > 0,$$

Здесь  $n_{2+}$  – концентрация димеров аргона. Граничные условия выбираются в виде

$$G_e(0,t) = \begin{cases} (-n_e v_e - \mu_e n_e E)|_{(0+,t)}, E \geq 0 \\ (-n_e v_e - \gamma(\mu_+ n_+ E + \mu_{2+} n_{2+} E))|_{(0+,t)}, E < 0 \end{cases}$$

$$G_e(b,t) = \begin{cases} (n_e v_e - \mu_e n_e E)|_{(b-,t)}, E < 0 \\ (n_e v_e - \gamma(\mu_+ n_+ E + \mu_{2+} n_{2+} E))|_{(b-,t)}, E \geq 0 \end{cases}$$

В газе содержится  $\sim 10^4 \text{ см}^{-3}$  заряженных частиц. Это значение принимаем за начальные условия для заряженных частиц.

4. Уравнения Пуассона для потенциала электрического поля

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{q_e}{\varepsilon_0} (n_+ + n_{2+} - n_e), \quad 0 \leq x \leq b, t > 0$$

с граничными условиями  $\varphi(0,t) = 0$ ,  $\varphi(b,t) = V_a \sin(\omega t)$

5. Уравнение теплопроводности атомно-ионного газа

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\lambda_a \frac{\partial T_a}{\partial x} \right) = j_i E + Q_{yn} N n_e$$

Граничные условия для данного уравнения следующие:

$$-\lambda_a \partial T_a / \partial x = -\chi(T_a - T_e) \text{ при } x = 0, \quad -\lambda_a \partial T_a / \partial x = \chi(T_a - T_e) \text{ при } x = b,$$

$\chi$  – полный коэффициент теплоотдачи,  $T_e$  – температура охлаждающий электрод воды.

6. Уравнение баланса концентрации метастабильных атомов

$$\frac{\partial n_m}{\partial t} - \frac{\partial G_m}{\partial x} = R_6 N n_e + R_{18} n_e n_{2*} - R_2 n_m^2 - R_3 n_m n_e - R_7 n_m - R_8 N n_m -$$

$$- R_9 n_m n_e - R_{10} n_m^2 - R_{15} N^2 n_m - R_{17} n_m n_{2*} - R_{19} n_m N^2, \quad 0 \leq x \leq b, t > 0,$$

с граничными условиями  $G_m(0,t) = (-n_m v_a)|_{(0+,t)}$ ,  $G_m(b,t) = (n_m v_a)|_{(b-,t)}$ . Начальные условия, не теряя общности, выберем нулевыми:  $n_m(x,0) = 0$

7. Кинетическое уравнение для димера аргона  $Ar_2^*$

$$\frac{\partial n_{2*}}{\partial t} = R_{19} n_m N^2 + R_{15} N^2 n_m - R_{14} n_{2*} - R_{16} n_{2*}^2 - R_{17} n_m n_{2*} - R_{18} n_e n_{2*}, \quad 0 \leq x \leq b, t > 0$$

Начальные условия выберем нулевыми, не теряя общности, так же, как и для метастабильных атомов:  $n_{2*}(x,0) = 0$ .

8. Кинетическое уравнение для нейтрального атома

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -R_1 n_e N + R_2 n_m^2 + R_4 n_e n_+ + R_5 n_e^2 n_+ - R_6 N n_e + R_7 n_m + R_8 N n_m + R_9 n_m n_e - R_{11} n_+ N^2 +$$

$$+ R_{12} n_e n_{2+} + R_{13} n_e n_{2+} + R_{14} n_{2*} - R_{15} N^2 n_m + R_{16} n_{2*} + R_{17} n_m n_{2*} + R_{19} n_m N^2, \quad 0 \leq x \leq b, t > 0.$$

Начальные условия, будем ставить как  $P/k T_a(x) = N(x,0)$ .

Коэффициенты скоростей процессов при электронном ударе зависят от локального значения приведенного электрического поля и от степени ионизации с учетом электрон-электронных столкновений.

Для решения рассматриваемой задачи предложен численный алгоритм, основанный на конечномерной аппроксимации задачи с помощью разностных схем с последующим применением для ее реализации итерационного процесса.

При атмосферном давлении и межэлектродном расстоянии в 2 мм в работе Balcon N.P., Aanesland A., Hagelaar G.J.M., Boswell R., Boeuf J.P. (2007) приведена максимальная экспе-

риментальная плотность электронов в центре разряда, равная  $5 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$ , по данным расчетов в этой же работе плотность электронов и ионов в амбиполярной области  $\approx 7 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$ . Расчеты по нашей модели в аналогичных условиях дали максимум концентрации  $\approx 3.9 \cdot 10^{11}$  (рис. 3). Профиль пространственного распределения заряженных частиц между электродами качественно совпадает полученными в работе Balcon N., Hagelaar G.J.M., Voeuf J.P., (2008), при этом количественное отличие от данной работы объясняется более низким напряжением.

Приведены расчеты для модельной задачи при атмосферном давлении, межэлектродном расстоянии в 2 см и амплитуде приложенного напряжения в 100 В. Усредненные за период плотности заряженных частиц показаны на рис. 4. Расчеты показали повышение плотности молекулярных ионов аргона вблизи приэлектродной области с сохранением квазинейтральности.

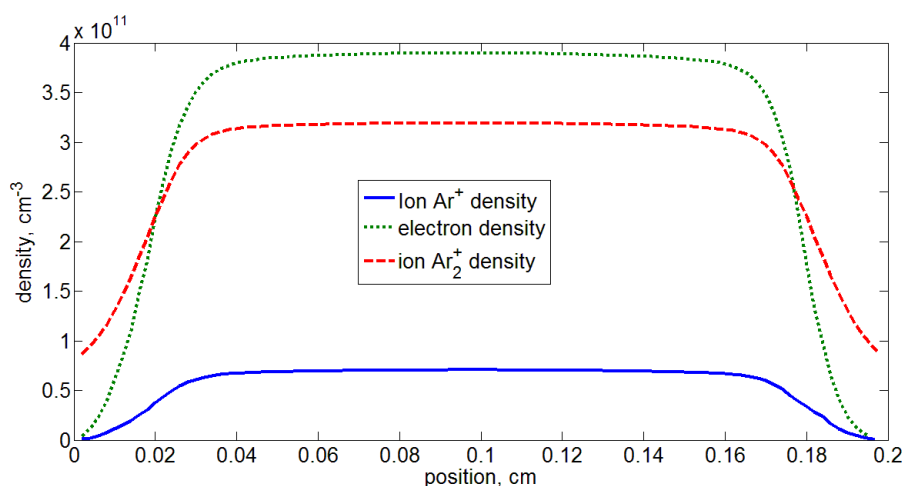


Рис.3. Распределение усредненной за период концентрации заряженных частиц

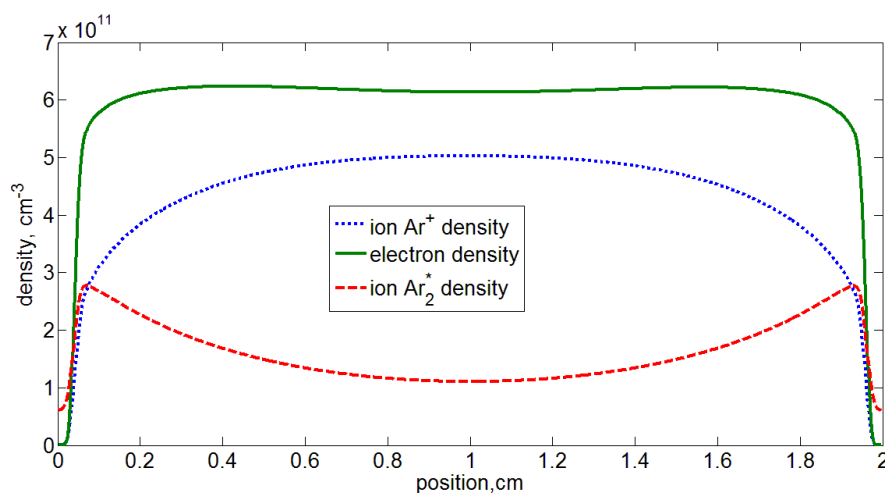


Рис.4. Распределение усредненной за период концентрации заряженных частиц

**В Заключение** приведены основные результаты работы:

1. Результаты численного моделирования показали, что в случае существенного нагрева газа (при повышенных давлениях, а также в случае больших межэлектродных расстояний при пониженных давлениях) изменение газовой температуры в межэлектродном пространстве начинает существенно влиять на соотношение вкладов в образование и гибель частиц различных плазмо-химических процессов, а следовательно, влияет на распределение и долю

заряженных (электронов, атомарных и молекулярных ионов), и возбужденных частиц в разрядном промежутке, что определяет развитие разряда

2. Построена самосогласованная математическая модель ВЧЕ-разряда в нелокальном приближении при пониженных давлениях в аргоне, в которой коэффициенты скоростей процессов при электронном ударе взяты с учетом электрон–электронных столкновений в зависимости от электронной температуры и степени ионизации.

3. Построена самосогласованная математическая модель ВЧЕ-разряда в локальном приближении при повышенных давлениях в аргоне, в которой коэффициенты скоростей процессов при электронных ударах взяты с учетом электрон–электронных столкновений в зависимости от значений приведенного локального газа и степени ионизации, а также с учетом пространственного изменения газовой температуры. В модели учтено наличие молекулярных ионов и димеров.

4. Разработаны алгоритмы численной реализации предложенных моделей, основанные на использовании неявной разностной схемы, построенной интегро–интерполяционным методом с применением разностей, направленных по потоку, и метода типа Гуммеля, который использовался для вычисления потоков заряженных частиц.

5. Разработан программный комплекс, позволяющий рассчитывать характеристики ВЧЕ-разряда при пониженном давлении в нелокальном приближении.

6. Проведено качественное и количественное сравнение полученных численных расчетов с известными данными из других литературных источников, в частности данными натурных экспериментов. Данные расчетов показали приемлемое совпадение результатов. Это подтверждает работоспособность и надежность разработанного комплекса программ, которые могут быть использованы для анализа физико-химических процессов в ВЧЕ разряде в широком диапазоне давлений.

#### **Личный вклад автора.**

Абдуллин И.Ш., Шнейдер М.Н. – обсуждение физических аспектов модели ВЧЕ-разряда при пониженных давлениях, Бандеров В.В. – консультативная помощь по разработке интерфейса, Абайдуллин Р.Н., Кадыров Р.Ф. Бикчантаев Д.Х. (студент) – помощь в проведении расчетов.

#### **Публикации.**

*Работы, опубликованные автором в ведущих рецензируемых научных журналах ВАК Министерства образования и науки Российской Федерации:*

1. Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Шнейдер М.Н. Математическая модель ВЧЕ разряда в аргоне при больших межэлектродных расстояниях // Вестник Казанского технологического университета. – 2013. – Т. 16, № 22. – С. 334–338.

2. Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Шнейдер М.Н. Моделирование высокочастотного емкостного разряда при больших межэлектродных расстояниях. I. Постановка задачи // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – Т. 155, кн. 2. – С. 123–130.

3. Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю. Высокочастотный емкостной разряд: моделирование (Обзор) // Вестник Казанского технологического университета. – 2014. – Т.17, № 23 – С. 9–14.

4. Чебакова В.Ю. Численное моделирование высокочастотного емкостного разряда // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2015. – Т. 157, кн. 2. – С. 126–140.

*Получено свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ:*

5. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю. Расчет основных параметров высокочастотного емкостного разряда в аргоне // Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ: РОСПАТЕНТ, 2015, № 2015612082 от 11.02.2015.

*В рецензируемых изданиях из базы Scopus:*

6. Zheltukhin V.S., Chebakova V.Ju., Abaidullin R.N., Kadyrov R.F. On solving of some nonlinear problems of plasma physics // Applied Mathematical Sciences. – 2015. – V. 9, №. 88. – P. 4351–4359. <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.55372>

*Другие публикации:*

7. Желтухин В.С., Чебакова В.Ю. Математическое моделирование высокочастотного емкостного разряда пониженного давления // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казанского математического общества, 2011. – Т. 44. – С. 128–130.

8. Чебакова В.Ю., Желтухин В.С. Высокочастотный емкостный разряд пониженного давления в плазмотроне с большим межэлектродным расстоянием // Материалы IX Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2012), 25–31 мая 2012 г., Алушта. – М.: Изд-во МАИ, 2012. – С. 583–584.

9. Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Шнейдер М.Н. Математическая модель ВЧЕ разряда при больших межэлектродных расстояниях // Материалы Международной научной конференции «Плазменные технологии исследования, модификации и получения материалов различной физической природы» (16–18 октября 2012 г.). – Казань: Казанский национальный исследовательский технологический университет, 2012. – С. 93–96.

10. Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Шнейдер М.Н. Моделирование ВЧЕ-разряда при больших межэлектродных расстояниях // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Девятой Всероссийской конференции. – Казань: Отечество, 2012. – С. 183–186.

11. Chebakova V., Zheltukhin V., Sheneider M. Simulation of lowered pressure capacity coupled radio-frequency discharge at big interelectrode distances // 14<sup>th</sup> Israel Conference on Plasma Science and Applications 28.02.2012, Weizmann Inst. Sci., 2012. – P. 44.

12. Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Шнейдер М.Н. Математическая модель высокочастотного емкостного разряда в аргоне при наличии метастабильных атомов // II Международная конференция «Высокопроизводительные вычисления – математические модели и алгоритмы», посвященная Карлу Якоби, г. Калининград, 3–5 октября 2013 г. Тезисы докладов. – Калининград: БФУ им. И.Канта, 2013. – С. 12–13.

13. Бандеров В.В., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю. Программный комплекс расчета основных параметров высокочастотного емкостного разряда в аргоне // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. – Казань: Казанский университет, 2013. – Т. 47. – С. 17–20.

14. Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Шнейдер М.Н. Математическая модель ВЧЕ-разряда в большом объеме // Материалы XVIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2013), 22–31 мая 2013 г., Алушта. – М.: Изд-во МАИ, 2013. – С. 567–569.

15. Чебакова В.Ю., Желтухин В.С. О математических моделях высокочастотного емкостного разряда // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. – Казань: Отечество, 2013. – Т. 48. – С. 98–128.

16. Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Шнейдер М.Н., Чебакова В.Ю. Моделирование высокочастотного емкостного разряда в аргоне с учетом нагрева тяжелых частиц // Математические методы в технике и технологиях–ММТТ-27. Сб. трудов XXVII Международной научной конференции. Т. 5. / Под общ. ред. А.А. Большакова. – Тамбов. Тамбовский гос. технический университет, 2014. – С. 34–37.
17. Abdullin I.Sh., Zheltukhin V.S., Schneider M.N., Chebakova V.Yu. Influence of neutral particles heating on characteristics of capacitive coupled RF discharge // Математические методы в технике и технологиях–ММТТ-27. Сб. трудов XXVII Международной научной конференции. Т. 5. / Под общ. ред. А.А. Большакова. – Тамбов. Тамбовский гос. технический университет, 2014. – С. 31–34.
18. Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Шнейдер М.Н. Нестационарная модель ВЧЕ-разряда при пониженном давлении // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Десятой Международной конференции. – Казань: Казанский университет, 2014. – С. 15–20.
19. Chebakova V.Ju., Schneider M.N., Zheltukhin V.S. Finite Difference Methods for Simulation the Non-Stationary RF Discharges with Large-Scale Inter-Electrode Distance // Abstracts of FDM'14: Sixth Conference on Finite Difference Methods: Theory and Applications, June 18-23, 2014, Lozenetz, Bulgaria. – Rousse, Bulgaria: University of Rousse, 2014. – P. 8.
20. Чебакова В.Ю., Желтухин В.С. Численное исследование высокочастотной низкотемпературной плазмы. Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна-2014» / Под ред. В.А. Костина. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2014. – С 402–404.
21. Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Шнейдер М.Н., Чебакова В.Ю. Математическая модель нестационарного ВЧЕ-разряда в аргоне // VII международный симпозиум по теоретической и прикладной плазмохимии.(3–7 сентября 2014 г., Плес, Россия): сборник трудов / Иван. гос. хим.-технол. ун-т. –Иваново, 2014. – С. 154–155.
22. Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Шнейдер М.Н., Чебакова В.Ю. Расчет концентрации метастабильных атомов в плазме ВЧЕ-разряда пониженного давления // Всероссийская (с международным участием) конференция «Физика низкотемпературной плазмы» ФНТП-2014: Сборник материалов конференции / М-во образ. и науки России, Казан. нац. исслед. технол. ун-т. – Казань: Изд-во КНИТУ, 2014. – Т. 1. – С. 208–211.
23. Желтухин В.С., Чебакова В.Ю. Разностные методы исследования ВЧЕ-разряда пониженного давления в плазмотроне с большим межэлектродным расстоянием // Материалы IX Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2014), 25–31 мая 2014 г., Алушта. – М: Изд-во МАИ, 2014. – С. 553–554
24. Chebakova V.J., Schneider M.N., Zheltukhin V.S. Finite difference methods for non-linear system of mathematical model of RF discharges // Abstracts of the International conference «Advanced mathematics, computations and applications-2014». Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia. June 8-11 2014. – Novosibirsk: Akademizdat, 2014. – P. 75.
25. Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Шнейдер М.Н., Чебакова В.Ю. Моделирование высокочастотного емкостного разряда пониженного давления с учетом метастабильных атомов // XLI международная звенигородская конференция по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу и УТС г. Звенигород, 10–14 февраля 2014 г. Тезисы докладов. – М.: ЗАО НТЦ «ПЛАЗМАИОФАН», 2014. – С. 204.

26. Абдуллин И.Ш., Бадриев И.Б., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю. Численное исследование высокочастотного емкостного разряда // XLII международная Звенигородская конференция по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу 9–13 февраля 2015 г., г. Звенигород. Сборник тезисов докладов. – М.: НТЦ «Плазмаиофан», 2015. – С. 211.
27. Бикчантаев Д.Х., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю. Моделирование процесса взаимодействия высокочастотного емкостного разряда с образцом // Международная конференция по математической теории управления и механике. Тезисы докладов, Суздаль 2 июля–7 июля 2015 г. – М.: МИАН, 2015. – С. 36–37.
28. Бикчантаев Д.Х., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю. Численное исследование процесса взаимодействия высокочастотного емкостного разряда с материалами // Теория управления и математическое моделирование: Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова (Ижевск, Россия, 9–11 июня 2015 г.). – Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2015. – С. 241–242.
29. Чебакова В.Ю. Моделирование ВЧЕ-разряда в локальном приближении // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. – Казань: Издательство Казанского математического общества, Изд-во Академии наук РТ, 2015. – Т. 52. – С.166–169.
30. Чебакова В.Ю. ВЧЕ-разряд при атмосферном давлении в локальной постановке // VI Всероссийская молодежная конференция по фундаментальным и инновационным вопросам современной физики (15–20 ноября 2015 г.). Программа и тезисы докладов. – М.: ФИАН, 2015. – С. 48.